

Análise Probabilística de Estabilidade de Taludes: Confiabilidade de Sistema em Série com FORM como Alternativa às Simulações de Monte Carlo

Higor Biondo de Assis

Doutorando em Geotecnia, Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil e Ambiental (PPGCA), Faculdade de Engenharia de Bauru (FEB), Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (UNESP), Bauru, SP, Brasil, higor.assis@unesp.br

Caio Gorla Nogueira

Professor Assistente Doutor, Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil e Ambiental (PPGCA), Faculdade de Engenharia de Bauru (FEB), Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (UNESP), Bauru, SP, Brasil, caio.nogueira@unesp.br

RESUMO: Este trabalho apresenta um procedimento para aplicação do Método de Confiabilidade de Primeira Ordem (FORM) como alternativa às Simulações de Monte Carlo (MCS) em análises probabilísticas de estabilidade de taludes. O programa computacional *Risk Assessment applied to Slope Stability* (RASS) foi utilizado para a realização das análises a partir do acoplamento direto dos métodos de equilíbrio limite aos métodos de confiabilidade. Dois exemplos de taludes são apresentados. O primeiro, um talude infinito, foi escolhido para demonstrar a capacidade do RASS de calcular adequadamente as respostas probabilísticas, exclusivamente. O segundo, constituído por múltiplas camadas de solo e com superfícies circulares de ruptura, foi selecionado para possibilitar a discussão acerca das principais vantagens e limitações do FORM e do MCS em análises probabilísticas de estabilidade de taludes. Neste exemplo, as análises via FORM foram conduzidas segundo a abordagem de confiabilidade de sistemas em série, e os valores inferior e superior da probabilidade de falha (pf) do talude foram estimados segundo os limites bimodais de Ditlevsen. O método de Hassan-Wolff foi utilizado para a identificação das superfícies de ruptura representativas (RSS), onde o talude representa o sistema em série e as RSS, suas componentes. Os resultados mostraram que o FORM pode ser uma alternativa interessante para redução do esforço computacional requerido nas análises probabilísticas de estabilidade de taludes, sendo capaz de aproximar consistentemente os valores de pf em relação às respostas do MCS com tempo de processamento reduzido.

PALAVRAS-CHAVE: Estabilidade de Taludes, Confiabilidade de Sistema, FORM, Simulações de Monte Carlo, Acoplamento Direto.

ABSTRACT: This paper presents a procedure for applying the First Order Reliability Method (FORM) as an alternative to Monte Carlo Simulations (MCS) in probabilistic analyses of slope stability. The computer programme *Risk Assessment applied to Slope Stability* (RASS) was used to carry out the analyses by directly coupling limit equilibrium methods to reliability methods. Two examples of slopes are presented. The first, an infinite slope, was chosen to demonstrate the ability of RASS to adequately calculate probabilistic responses exclusively. The second, consisting of multiple layers of soil and circular slip surfaces, was selected to enable discussion of the main advantages and limitations of FORM and MCS in probabilistic analyses of slope stability. In this example, the analyses via FORM were conducted according to the reliability of series system approach, and the lower and upper values of the probability of failure (pf) of the slope were estimated according to Ditlevsen's bimodal bounds. The Hassan-Wolff method was used to identify the representative slip surfaces (RSS), where the slope represents the series system and the RSS its components. The results showed that FORM can be an interesting alternative for reducing the computational effort required in probabilistic analyses of slope stability.

KEYWORDS: Slope Stability, System Reliability, FORM, Monte Carlo Simulations, Direct Coupling.

1 INTRODUÇÃO

As análises probabilísticas de estabilidade de taludes têm recebido uma atenção cada vez maior na engenharia geotécnica contemporânea (CHAKRABORTY; DEY, 2022; JIANG et al., 2022), evidenciando uma evolução significativa neste campo de estudo. Estas análises são predominantemente realizadas a partir da combinação entre o método de Simulações de Monte Carlo (MCS) e modelos matemáticos, tais como superfícies de resposta, modelos de substituição ou metamodelos (JI; LOW, 2012; PRZEWŁÓCKI, 2021), que são capazes de fornecer uma aproximação satisfatória das respostas fornecidas pelos métodos de equilíbrio limite. Neste contexto, a estabilidade de um talude é avaliada considerando a probabilidade do fator de segurança (FS) ser inferior a unidade, valor que indica a condição de instabilidade do talude. Em contraste com as análises determinísticas, onde os parâmetros de entrada são tratados como constantes, nas análises probabilísticas, a variabilidade desses parâmetros é levada em conta por meio de suas distribuições de probabilidades e descritores centrais, representando uma abordagem mais abrangente e realista para a avaliação da estabilidade do talude.

Apesar dos taludes serem objetos tridimensionais (3D), eles são comumente representados por modelos bidimensionais (2D) correspondentes à seção transversal mais propensa à ruptura ou qualquer outra que se queira avaliar. Dessa forma, em análises determinísticas de modelos 2D em que a ruptura mais provável tem movimento rotacional, a condição crítica de estabilidade é definida por investigação de múltiplas superfícies circulares. O objetivo é identificar a superfície que fornece o mínimo valor de FS , denominada superfície crítica determinística, dentre todas as superfícies avaliadas.

Procedimento semelhante ao adotado nas análises determinísticas pode ser adotado na investigação das condições probabilísticas críticas. No entanto, é preciso estar atento às particularidades dos métodos de confiabilidade a serem utilizados e aos objetivos das análises probabilísticas. Sejam estas análises realizadas via MCS ou via Método de Confiabilidade de Primeira Ordem (FORM), a avaliação de múltiplas superfícies circulares é indispensável, mas seguem abordagens distintas.

O MCS é um método de simulação que permite analisar cenários possíveis a partir da geração de dados amostrais que obedecem as distribuições de probabilidades marginais das variáveis aleatórias. Assim, com o uso de um gerador pseudoaleatório não viciado, combinações de valores possíveis das variáveis aleatórias são utilizados para cálculo da resposta de interesse. Ao término das análises, verifica-se se as respostas encontradas representam a ocorrência do evento de interesse ou não. A razão entre o número de ocorrências do evento de interesse e o número total de simulações expressa a probabilidade de ocorrência deste evento. Em análises de estabilidade de taludes, este procedimento pode ser empregado na determinação tanto da probabilidade de múltiplas superfícies falharem, quanto da probabilidade uma única superfície falhar. Esta última opção costuma ser menos usual, enquanto a primeira é a que está presente nos principais programas computacionais de análises de estabilidade de taludes e fornece como principal resposta a probabilidade de falha do talude (pf), já que múltiplas superfícies são consideradas. Portanto, se o objetivo da análise probabilística for conhecer principalmente a probabilidade do talude falhar, o MCS é a opção mais adequada (CRUM et al., 2001).

Diferentemente do MCS, o FORM é um método pertencente a categoria dos métodos de transformação, também denominados métodos de aproximação. Neste caso, o problema de confiabilidade é dado na forma de um problema de otimização e emprega algoritmos específicos para identificação da condição que proporciona a máxima probabilidade de ocorrência do evento de interesse do problema. Assim, no contexto das análises de estabilidade de taludes via FORM, as probabilidades de falha das superfícies (pf_i) são calculadas individualmente, e a superfície crítica probabilística é determinada pelo valor máximo de pf_i (pf_{max}), de forma análoga ao que é feito nas análises determinísticas. Dessa forma, de acordo com o conceito de confiabilidade de sistema, as superfícies de ruptura de um talude são equiparadas às componentes do sistema e estão conectadas em série (ZHOU; GONG; HONG, 2017). O talude, por sua vez, representa o sistema, composto por múltiplas componentes. A associação em série das componentes implica na ausência de redundância no sistema, onde a falha de qualquer componente resulta na falha do sistema como um todo. Segundo esta abordagem e a partir do conhecimento das probabilidades de falha individuais das componentes, as pf_i obtidas via FORM, deve ser possível estimar a probabilidade de falha do sistema (pf_{sis}) e então compará-la à pf dada por MCS. A principal justificativa para a avaliação da estabilidade de taludes segundo a confiabilidade de sistemas em série reside no fato de que a pf_{max} , dada por uma única superfície, tende a subestimar a probabilidade de falha do sistema, com $pf_{max} < pf$ (CHOWDHURY; XU, 1992; OKA; WU,

1990). Isso se deve à premissa de que a ruptura do talude não é determinada exclusivamente por uma única superfície (LIU et al., 2023; MA et al., 2017), mas sim por um conjunto reduzido de superfícies de ruptura representativas (RSS). Portanto, ao considerar apenas pf_{max} , pode-se negligenciar a contribuição significativa de outras superfícies para a falha do sistema, resultando em uma avaliação da estabilidade que não reflete completamente a realidade do comportamento do talude (ZHANG; ZHANG; TANG, 2011). Estes são alguns dos motivos pelo qual o MCS é considerado o método mais adequado para lidar com análises de estabilidade de taludes (HUANG; GRIFFITHS; FENTON, 2010).

Embora o MCS ofereça diversas vantagens, ele também apresenta algumas limitações. Para garantir a convergência dos resultados, pode ser necessário realizar um grande volume de análises. Essa exigência pode resultar em custos computacionais proibitivos, tornando as análises inviáveis, especialmente em escritórios de engenharia geotécnica que contam apenas com computadores de uso pessoal, uma realidade comum em muitos locais ao redor do mundo. A fim de minimizar o tempo total de processamento do MCS, este trabalho apresenta um procedimento alternativo para estimativa da pf_{sis} que utiliza o acoplamento direto (LEONEL; BECK; VENTURINI, 2011) dos métodos de equilíbrio limite ao FORM, disponível no programa computacional *Risk Assessment Applied to Slope Stability* (RASS). O método de Hassan-Wolff (HASSAN; WOLFF, 1999; ZHANG et al., 2013) é empregado para a identificação das RSS, e os limites bimodais de Ditlevsen (DITLEVSEN, 1979), para estimativa dos valores mínimo e máximo da pf_{sis} , incluindo a superfície de pf_{max} como componente do sistema. Um exemplo ilustrativo de talude com múltiplas camadas de solo é apresentado para fins de comparação entre os resultados do MCS e do FORM, segundo a abordagem de confiabilidade de sistemas.

2 MÉTODOS

O programa RASS permite a realização das análises probabilísticas de estabilidade de taludes a partir do acoplamento direto de dois de seus módulos, sendo o primeiro referente aos métodos de equilíbrio limite, e o segundo, aos métodos de confiabilidade. Desta forma, a necessidade de se construir funções aproximadoras de FS é eliminada, já que o FS pode ser calculado diretamente a partir da leitura e tratamento das características geométricas do problema e da utilização dos parâmetros geotécnicos na aplicação dos métodos de equilíbrio limite. Os detalhes mais relevantes acerca dos procedimentos de cálculo implementados no RASS e dos métodos empregados nas análises probabilísticas deste trabalho são apresentados a seguir.

2.1 Métodos de Equilíbrio Limite

Nas análises principais deste trabalho, três métodos de equilíbrio limite baseados no método das lamelas foram empregados: método de Fellenius (Fellenius); método de Bishop Simplificado (Bishop); e o método de Morgenstern-Price (MP), com função de interação das forças interlamelares do tipo meia-senoide. Dentre estes, o método de Fellenius destaca-se como o único método direto para o cálculo do FS , mostrando-se interessante em termos de eficiência computacional ao ser aplicado para estimar o valor inicial de FS (FS_0) utilizado no processo iterativo de cálculo do FS dos métodos de Bishop e MP. Esta estratégia pode acelerar a convergência dos cálculos de FS em comparação à adoção de valores predefinidos de FS_0 , frequentemente fixados em 1,0 ou 1,5. Já os métodos de Bishop e MP foram escolhidos para fins comparativos de suas respostas probabilísticas, pois guardam diferenças importantes em suas formulações. O método de Bishop tem formulação simplificada do FS , que não satisfaz por completo todas as condições de equilíbrio de forças, enquanto o método de MP tem formulação rigorosa, em que todas as condições de equilíbrio de forças e de momentos são satisfeitas (ABRAMSON et al., 2001; DUNCAN, 1996; DUNCAN; WRIGHT; BRANDON, 2014; ZHU et al., 2005). Tais métodos são frequentemente aplicados em trabalhos que se dedicam às análises probabilísticas de estabilidade de taludes.

2.2 Função de Estado Limite

Para que as análises probabilísticas sejam possíveis, é necessário definir a função de estado limite $g(\mathbf{x})$, que representa o modo de falha para o qual se pretende calcular a probabilidade de ocorrência. No problema de estabilidade de taludes, $g(\mathbf{x})$ representa a ruptura do talude por cisalhamento e é dada na forma da Equação 1:

$$g(\mathbf{x}) = FS(\mathbf{x}) - 1, 0 \quad (1)$$

em que \mathbf{x} é o vetor de valores assumidos pelas variáveis aleatórias \mathbf{X} na avaliação de $g(\mathbf{x})$, de modo $g(\mathbf{x}) \leq 0$ representa o domínio de falha, já que $FS(\mathbf{x}) \leq 1,0$ representa a ruptura do talude. Observa-se que para avaliação de $g(\mathbf{x})$ é imprescindível o emprego de um modelo que forneça a resposta mecânica para a verificação da condição de estabilidade do talude, neste caso dada por $FS(\mathbf{x})$. Através do acoplamento direto, é possível avaliar $g(\mathbf{x})$ diretamente, combinando os métodos de equilíbrio limite com os métodos de confiabilidade. Por esse motivo, uma compreensão abrangente desses métodos se torna essencial, ressaltando a importância do desenvolvimento de programas computacionais dedicados às análises probabilísticas de estabilidade de taludes, como é o caso do RASS.

2.3 Simulações de Monte Carlo

O MCS é a alternativa mais empregada em análises de confiabilidade de taludes e está disponível no programa RASS. O método é considerado como padrão para este tipo de análise, segundo a prática geotécnica, e fornece resultados de probabilidade de falha do talude que são considerados como valores de referência. O procedimento consiste na geração de uma amostra pseudoaleatória, com uso de um gerador não viciado, a partir das distribuições marginais das variáveis aleatórias \mathbf{X} . Esta amostra é representada matricialmente, sendo que o número de colunas da matriz é igual ao número de variáveis aleatórias e o número de linhas é igual ao número de simulações (n_S) a serem processadas. Cada linha dessa matriz contém o conjunto de valores admitidos pelas variáveis aleatórias, representado por \mathbf{x}_k , a ser empregado em cada uma das n_S simulações, com $k = 1, \dots, n_S$. Para todas as superfícies circulares a serem testadas, o valor de $FS(\mathbf{x}_k)$ é calculado, para que a superfície de ruptura que fornece o menor valor de $FS(\mathbf{x}_k)$ possa ser identificada. Em seguida, a partir do mínimo valor de $FS(\mathbf{x}_k)$ obtido, avalia-se a equação de estado limite, de modo que para $g(\mathbf{x}_k) \leq 0$ a realização \mathbf{x}_k pertence ao domínio de falha (Ω_f) e para $g(\mathbf{x}_k) > 0$, pertence ao domínio de sobrevivência (Ω_s). A função indicadora $I[\mathbf{x}_k]$ é então responsável por contabilizar as ocorrências de simulações em que \mathbf{x}_k pertence ou não ao domínio de falha, conforme mostra a Equação 2:

$$\begin{aligned} I[\mathbf{x}_k] &= 1 \text{ se } \mathbf{x}_k \in \Omega_f \\ I[\mathbf{x}_k] &= 0 \text{ se } \mathbf{x}_k \in \Omega_s \end{aligned} \quad (2)$$

A estimativa da probabilidade de falha (pf), segundo o MCS é dada conforme a Equação 3:

$$pf \approx \frac{1}{n_S} \sum_{k=1}^{n_S} I[\mathbf{x}_k] = \frac{n_f}{n_S} \quad (3)$$

em que n_f corresponde ao número de ocorrências em que $\mathbf{x}_k \in \Omega_f$. Além do cálculo da pf , nas simulações de Monte Carlo é importante avaliar a suficiência da amostra gerada. A convergência da pf e de sua variância devem ser necessariamente avaliadas. Sendo assim, avalia-se o comportamento da pf e de seu coeficiente de variação (δ_{pf}) a medida em que n_S é incrementado. A estimativa de δ_{pf} (ANG; TANG, 1984) é dada conforme a Equação 4:

$$\delta_{pf} \approx \sqrt{\frac{1 - pf}{n_S \cdot pf}} \quad (4)$$

e a estimativa do índice de confiabilidade equivalente (β_{eq}) é dada conforme a Equação 5:

$$\beta_{eq} = -\Phi^{-1}(pf) \quad (5)$$

em que $\Phi^{-1}(\cdot)$ é a inversa da distribuição normal padrão acumulada. Ao término da análise, obtém-se: um vetor de dimensão n_S que armazena os valores mínimos de $FS(\mathbf{x}_k)$ definidos em cada uma das simulações k ;

a indicação 0 ou 1, para cada ocorrência de \mathbf{x}_k pertencente ao domínio de sobrevivência ou de falha, respectivamente; a identificação das superfícies de ruptura correspondentes aos mínimos valores de $FS(\mathbf{x}_k)$ encontrados. A partir dessas respostas, é possível estimar os valores de pf , δ_{pf} , β_{eq} , valor esperado ou média e variância de $FS(\mathbf{x}_k)$, e estas estimativas referem-se ao talude como um todo, pois considera múltiplas superfícies de ruptura potenciais. Além disso, é possível visualizar de que forma são distribuídas as probabilidades de $FS(\mathbf{x}_k)$, por meio da construção de um histograma, o que permite verificar se a distribuição normal é adequada para estimativa de β_{eq} , por exemplo. O método também pode ser utilizado para analisar individualmente as superfícies de ruptura de interesse e pode fornecer informações importantes acerca da linearidade da função de estado limite.

2.4 FORM

O FORM é um método de confiabilidade que pertence à categoria dos métodos de transformação, também chamados de métodos de aproximação. Quando as análises probabilísticas são conduzidas com uso do FORM, as superfícies de ruptura são avaliadas individualmente, de modo que cada uma das superfícies possui sua própria probabilidade de falha. As análises probabilísticas via FORM consistem, portanto, na solução do problema de otimização escrito na forma da Equação 6:

$$\beta = \min_{g(\mathbf{y})=0} \sqrt{\mathbf{y}^{*T} \mathbf{y}^*} \quad (6)$$

e tem por objetivo encontrar o vetor de coordenadas do ponto de projeto (\mathbf{y}^*), que forneça o menor valor de β , sujeito à $g(\mathbf{y}) = 0$. Em outras palavras, as realizações \mathbf{x} das variáveis aleatórias \mathbf{X} são transformadas isoprobabilisticamente do espaço físico \mathbb{X} para o espaço normal padrão não correlacionado \mathbb{Y} , através de $\mathbf{y} = \mathbf{T}(\mathbf{x})$, a fim de que \mathbf{y}^* e β possam ser definidos iterativamente, segundo uma tolerância predefinida. A verificação da convergência ocorre tanto na variável β , quanto na norma euclidiana do vetor de coordenadas do ponto de projeto $\|\mathbf{y}^*\|$. Uma vez convergido o valor de β , sua probabilidade de falha equivalente (pf_{eq}) é dada conforme a Equação 7:

$$pf_{eq} = \Phi(-\beta) \quad (7)$$

em que $\Phi(\cdot)$ é distribuição normal padrão acumulada. O procedimento de cálculo é realizado segundo o algoritmo HLRF (HASOFER; LIND, 1974; RACKWITZ; FIESSLER, 1978), que ao término das análises fornece os valores de β , pf_{eq} , \mathbf{y}^* e o vetor de cossenos diretores ($\boldsymbol{\alpha}$). Esta última variável resposta fornece informações importantes acerca da importância das variáveis aleatórias na determinação da pf_{eq} , de modo que $\boldsymbol{\alpha}^2$ corresponde aos fatores de sensibilidade das variáveis aleatórias envolvidas no problema. Quando o FORM é empregado, todas as respostas probabilísticas mencionadas são definidas para cada uma das superfícies de ruptura, avaliadas individualmente. Estas respostas podem enriquecer bastante o conjunto de resultados e, consequentemente, orientar mais racionalmente as tomadas de decisões relativas às condições de estabilidade do talude analisado.

2.4.1 Confiabilidade de Sistemas em Série

A probabilidade de falha de um sistema em série (pf_{sis}) pode ser estimada com uso do FORM a partir do cálculo de um intervalo de probabilidades de falha, delimitado pelos chamados limites bimodais inferior e limite superior de Ditlevsen (1979). Para obtenção desses limites, é necessária a ordenação decrescente das pf dos componentes do sistema, para que em seguida se possa avaliar a dependência linear entre pares de componentes a partir dos coeficientes de correlação (ρ_{ij}), dados pela Equação 8:

$$\rho_{ij} = \boldsymbol{\alpha}_i^T \boldsymbol{\alpha}_j \quad (8)$$

O coeficiente ρ_{ij} correlaciona, portanto, os fatores de segurança de duas superfícies de ruptura, avaliadas aos pares, através de $\boldsymbol{\alpha}_i$ e $\boldsymbol{\alpha}_j$, onde os índices i e j correspondem à identificação dessas superfícies. A matriz dos

coeficientes de correlação do sistema pode ser denotada por ρ , que é uma matriz quadrada, simétrica, de tamanho igual ao número de componentes do sistema (n_m), com todos os termos da diagonal principal iguais a 1 e os demais termos podendo assumir, ao menos teoricamente, valores entre -1 e 1. A partir disso, os limites bimodais inferior e superior podem ser calculados a partir de pf_i e pf_j , com $i = 1, \dots, n_m$ e $j = 1, \dots, n_m$, conforme proposto por Ditlevsen (1979), para que a pf_{sis} possa ser estimada segundo a Equação 9:

$$pf_1 + \sum_{i=2}^{n_m} \max \left[\left\{ pf_i - \sum_{j=1}^{i-1} p(f_i \cap f_j) \right\}; 0 \right] \leq pf_{sis} \leq \min \left[\left\{ \sum_{i=1}^{n_m} pf_i - \sum_{i=2}^{n_m} \max_{j<i} p(f_i \cap f_j) \right\}; 1 \right] \quad (9)$$

A variável pf_1 corresponde à probabilidade da superfície de pf_{max} , que é a mesma que admite a primeira posição no ranqueamento decrescente das probabilidades de falha requeridas pelo procedimento. Observa-se que o cálculo pf_{sis} inclui termos de segunda ordem $p(f_i \cap f_j)$, já que os componentes do sistema são avaliados aos pares. Para valores positivos de ρ_{ij} , $p(f_i \cap f_j)$ é definido conforme a Equação 10. Caso contrário, se ρ_{ij} é negativo, $p(f_i \cap f_j)$ é definido conforme a Equação 11:

$$\max [p(A), p(B)] \leq p(f_i \cap f_j) \leq p(A) + p(B) \quad (10)$$

$$0 \leq p(f_i \cap f_j) \leq \min [p(A), p(B)] \quad (11)$$

Os termos de segunda ordem dependem, portanto, das probabilidades dos eventos A e B, dadas por $p(A)$ e $p(B)$, que dependem de β_i , β_j e ρ_{ij} , como mostram as Equações 12 e 13:

$$p(A) = \Phi(-\beta_i) \Phi \left(-\frac{\beta_j - \rho_{ij} \beta_i}{\sqrt{1 - \rho_{ij}^2}} \right) \quad (12)$$

$$p(B) = \Phi(-\beta_j) \Phi \left(-\frac{\beta_i - \rho_{ij} \beta_j}{\sqrt{1 - \rho_{ij}^2}} \right) \quad (13)$$

Maiores detalhes acerca dos conceitos e da formulação dos limites bimodais podem ser consultados em Ditlevsen (1979), Ji e Low (2012), Zhang, Zhang e Tang (2011) e Beck (2019).

2.4.2 Método Hassan-Wolff

O método de Hassan-Wolff é um procedimento expedito, desenvolvido com a finalidade de identificar as superfícies de ruptura críticas em análises de confiabilidade de taludes (CRUM et al., 2001; HASSAN; WOLFF, 1999). Essas superfícies, também chamadas de superfícies de ruptura representativas (RSS) são obtidas a partir de n_{VA} variações impostas às variáveis aleatórias do problema, em que n_{VA} corresponde à quantidade de variáveis aleatórias, e μ_{ξ_i} e σ_{ξ_i} denotam a média e o desvio-padrão da variável aleatória i , respectivamente, com $i = 1, \dots, n_{VA}$. As variações sugeridas pelo método obedecem à regra descrita pela Equação 14:

$$\xi^{(i)} = \{ \mu_{\xi_1}, \dots, \mu_{\xi_i} - \sigma_{\xi_i}, \dots, \mu_{\xi_{n_{VA}}} \} \quad (14)$$

Assim, para cada combinação $\xi^{(i)}$, uma análise determinística é realizada, possibilitando a identificação de das RSS, as quais são definidas pelo mínimo valor de $FS(\xi^{(i)})$. Segundo Hassan e Wolff (1999), dentre as

RSS, a superfície com o menor valor de FS é considerada a superfície crítica probabilística. A explicação para esta afirmação é que quando a variável aleatória que mais contribui para a incerteza no FS assume um valor baixo, mas de probabilidade razoável, no seu intervalo possível, a localização da superfície crítica encontrada será dominada por esta variável aleatória (ZHANG et al., 2013). O método é uma alternativa interessante para a identificação das RSS, superfícies que possivelmente governam o mecanismo de falha do talude, sendo útil à aplicação da abordagem de confiabilidade de sistemas em série e a determinação dos limites bimodais para a pf_{sis} via FORM. Dessa forma, os modos de falha relevantes do sistema são representados pelas superfícies RSS mais a superfície de pf_{max} exclusivamente, de modo que o sistema pode ser composto por até $n_{VA} + 1$ superfícies, caso nenhuma dessas superfícies sejam coincidentes.

3 EXEMPLO 1

O Exemplo 1 é um caso bastante simples de estabilidade de talude e tem por finalidade demonstrar a validade das análises de confiabilidade realizadas com o uso do programa RASS, empregando os métodos FORM e MCS. Um talude infinito foi escolhido devido à simplicidade da representação explícita da função de estado limite, a fim de que as rotinas computacionais referentes aos métodos de confiabilidade pudessem ser verificadas isoladamente. Neste caso, apenas uma superfície de ruptura foi considerada, com geometria planar, paralela à superfície do terreno. O talude é constituído por argila saturada ($tg\phi'=0$, $u=0$), em que a resistência não-drenada (s_u) é a única variável aleatória do modelo, com distribuição de probabilidades lognormal, média 25,0 kN/m², desvio-padrão 2,5 kN/m², conforme apresentado por GRIFFITHS et al. (2011). Assim, a expressão do FS para taludes infinitos admite a forma da Equação 15:

$$FS = \frac{s_u}{\gamma \cdot H \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta} \quad (15)$$

em que os parâmetros γ , H e θ são variáveis determinísticas ($\gamma=20\text{kN/m}^3$, $H=2,5\text{m}$ e $\theta=30^\circ$) e correspondem ao peso específico do solo, a altura entre a superfície de escorregamento e a superfície do terreno e o ângulo de inclinação do talude, respectivamente. Os resultados são apresentados na Tabela 1:

Tabela 1. Probabilidades de falha e índices de confiabilidade (Exemplo 1).

	pf	β	δ_{pf}
GRIFFITHS et al. (2011)	8,20%	1,392	-
RASS _{FORM}	8,20%	1,392	-
RASS _{MCS*}	8,23%	1,389	1,05%

* $n_s = 100000$.

Os resultados demonstram a validade das rotinas computacionais implementadas no RASS, relativas ao módulo de confiabilidade, e a acurácia dos resultados em relação ao exemplo de referência, para ambos os métodos testados, com valores muito próximos de pf e, conseqüentemente, de β .

4 EXEMPLO 2

O Exemplo 2 tem por finalidade apresentar um comparativo entre os resultados dados por diferentes métodos empregados nas análises probabilísticas de estabilidade de taludes. Originalmente proposto por Donald e Giam (1989), este exemplo é frequentemente utilizado em estudos de estabilidade de taludes que seguem a abordagem de confiabilidade de sistema (JI; LOW, 2012; ZHANG et al., 2013). As características geométricas da seção transversal deste exemplo estão representadas na Figura 2.

Neste exemplo, as variabilidades dos parâmetros de resistência dos solos foram assumidas arbitrariamente, em conformidade com os coeficientes de variação apresentados por PHOON (1999). Para as coesões dos solos 2 e 3, o coeficiente de variação empregado foi de 40%, e para os ângulos de atrito dos solos 1, 2 e 3, o coeficiente de variação foi de 10%. Os valores empregados são apresentados na Tabela 2. As variáveis aleatórias seguem a distribuição normal de probabilidades e os pesos específicos foram considerados variáveis determinísticas para todos os solos, sendo $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 19,50 \text{ kN/m}^2$. A coesão do solo 1 também é variável determinística, sendo $c'_1 = 0 \text{ kN/m}^2$.

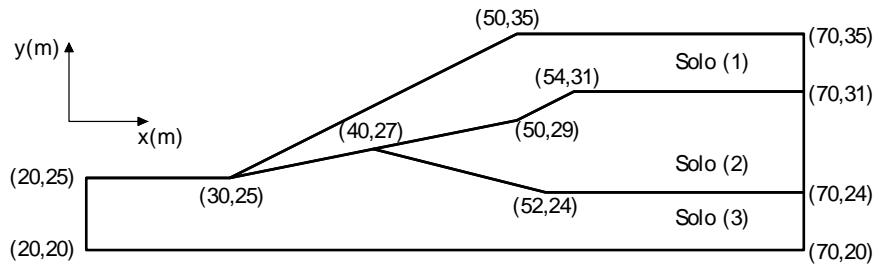


Figura 2. Seção transversal do talude (Exemplo 2) constituído por múltiplos solos, adaptado de Donald e Giam (1989).

Tabela 2. Variabilidade dos parâmetros de resistência dos solos (Exemplo 2).

	$\mu_c \text{ (kN/m}^2\text{)}$	$\sigma_c \text{ (kN/m}^2\text{)}$	$\mu_\phi \text{ (}^\circ\text{)}$	$\sigma_\phi \text{ (}^\circ\text{)}$
Solo 1	0,00	-	38,00	3,80
Solo 2	5,30	2,12	23,00	2,30
Solo 3	7,20	2,88	20,00	2,00

Uma análise preliminar foi realizada para uma única superfície circular de ruptura, definida por $\{x_c, y_c, r\}$, com 50 lamelas para discretização do talude e tolerância para convergência das respostas de FS e β de 10^{-4} . Esta análise foi conduzida com a finalidade de demonstrar a validade das respostas determinísticas fornecidas pelo programa RASS e comparar a capacidade do FORM de fornecer respostas probabilísticas suficientemente próximas às respostas dadas por MCS. Os resultados são apresentados na Tabela 3:

Tabela 3. Resultados referentes a superfície fixa, com $x_c = 34,0$ m, $y_c = 45,0$ m e $r = 20,6$ m (Exemplo 2).

	FS		β		pf		δ_{pf}
	Slide2	RASS	FORM	MCS	FORM	MCS	
Bishop	1,4039	1,4039	3,4290	3,4702	3,03E-04	2,60E-04	6,20%
MP	1,3620	1,3562	3,2032	3,2332	6,80E-04	6,12E-04	4,04%

Os valores de FS calculados pelo programa RASS foram comparados aos valores dados pelo programa comercial Slide2, para os mesmos dados de entrada do problema, e demonstraram a validade das respostas determinísticas do programa RASS. Quanto às respostas probabilísticas, diferenças muito pequenas foram observadas entre as respostas do FORM e do MCS, comparando-as para um mesmo método de equilíbrio limite. Estas diferenças possivelmente estão relacionadas ao grau de não linearidade da equação de estado limite $g(\mathbf{x}) = 0$, e não comprometem a capacidade de aproximação do FORM em relação às respostas do MCS.

Estendendo as análises para o mesmo talude, aproximadamente 2000 superfícies foram incluídas para investigação das superfícies críticas probabilísticas segundo a abordagem de confiabilidade de sistema em série. As superfícies críticas probabilísticas estão ilustradas na Figura 3:

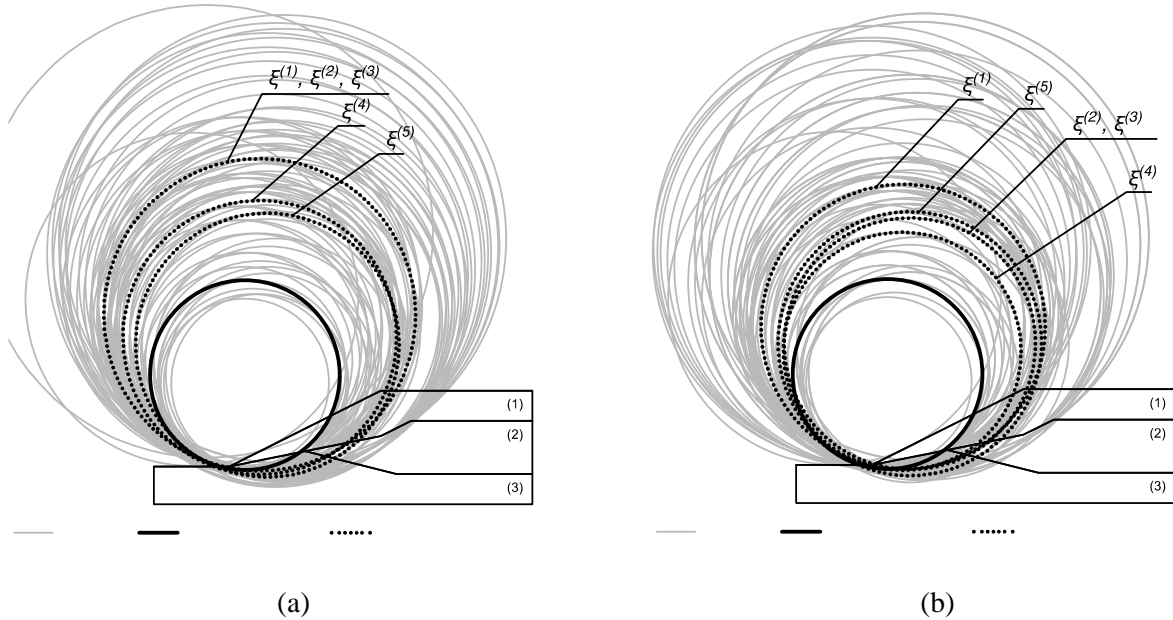


Figura 3. Superfícies críticas identificadas segundo os métodos de MCS, FORM e Hassan-Wolff, com acoplamento dos métodos de (a) Bishop e de (b) Morgenstern-Price.

Observa-se uma maior quantidade de superfícies identificadas pelo MCS em relação ao FORM. Estas superfícies representam o conjunto de superfícies, dentre as 2000 testadas, que ao menos uma vez forneceram o mínimo valor de $FS(\mathbf{x}_k)$ para as n_s simulações realizadas. As demais superfícies, dadas pelo FORM, representam a superfície de pf_{max} e as RSS identificadas pelo método Hassan-Wolff para as combinações $\xi^{(i)}$, como descrito anteriormente. Observou-se que, para ambos os métodos de equilíbrio limite, a superfície de ruptura que mais vezes forneceu o mínimo valor de $FS(\mathbf{x}_k)$ coincide com a superfície crítica determinística e está presente entre as RSS. Para o método de Bishop, esta superfície é a mesma dada pelas combinações $\xi^{(1)}$, $\xi^{(2)}$ e $\xi^{(3)}$, para o método de Morgenstern-Price, pelas combinações $\xi^{(2)}$ e $\xi^{(3)}$. Os valores de pf do talude segundo o método de MCS são apresentados como respostas de referência na Figura 4, a fim de permitir a comparação com os valores dos limites bimodais calculados para a pf_{sis} via FORM, a medida em que as RSS são adicionadas ao sistema em série como componentes:

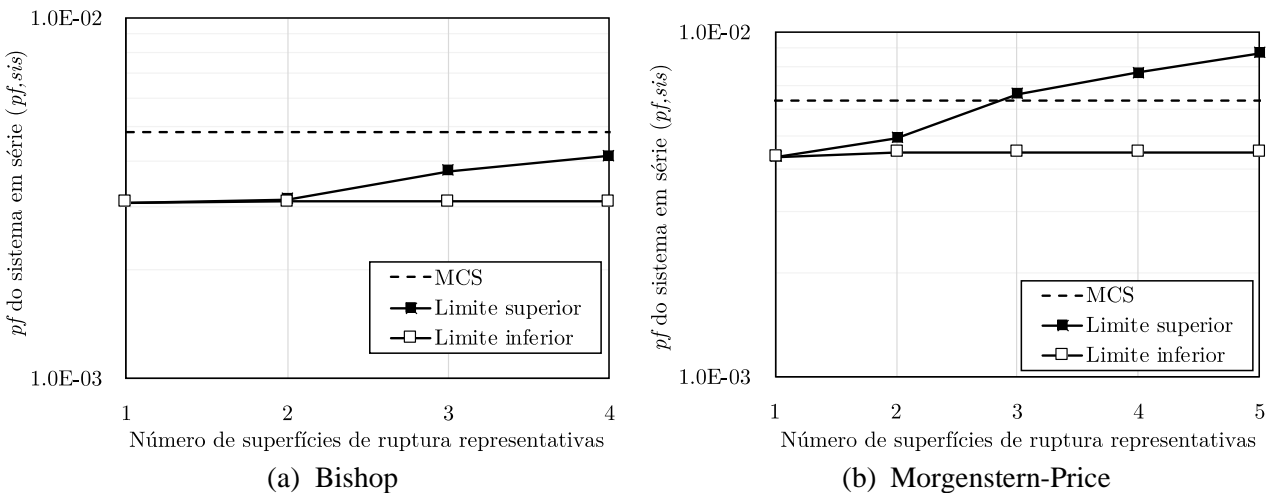


Figura 4. Comparação dos resultados das probabilidades de falha do talude utilizando diferentes combinações entre métodos de equilíbrio limite e métodos de confiabilidade.

Nota-se que a composição do sistema em série considerou um conjunto reduzido de superfícies de ruptura, dadas pela pf_{max} e pelas RSS, exclusivamente. Os cálculos dos limites bimodais da pf_{sis} e a adição de componentes ao sistema seguiram a ordenação decrescente das pf individuais calculadas via FORM, de modo que $pf_{max} = pf_1$. Complementarmente, os valores de FS críticos para ambos os métodos de equilíbrio limite empregados, os índices de confiabilidade correspondentes às probabilidades de falha do sistema e os valores de δ_{pf} para verificação da convergência do MCS são apresentados na Tabela 4:

Tabela 4. Resultados das análises de estabilidade com 1500 superfícies avaliadas (Exemplo 2).

	FS	FORM		MCS	FORM		MCS	δ_{pf}
		β_{min}	β_{max}	β_{eq}	$pf_{eq,min}$	$pf_{eq,max}$	pf	
Bishop	1,4039	2,6406	2,7387	2,5899	3,08E-03	4,14E-03	4,80E-03	4,56%
MP	1,3745	2,3767	2,6120	2,4915	4,50E-03	8,73E-03	6,36E-03	3,97%

Uma vantagem do uso do FORM em relação ao MCS, frequentemente relatada na literatura, diz respeito ao esforço computacional envolvido nas análises. Para este exemplo, as análises via MCS exigiram um tempo de processamento total da ordem de 10000 segundos, enquanto as análises via FORM exigiram apenas 10 segundos, aproximadamente. Todas as análises foram realizadas com a mesma versão do programa RASS, escrita em linguagem Fortran, em um mesmo computador de uso pessoal e sem paralelização do código.

Quando o método de Bishop foi empregado no acoplamento direto, os limites bimodais calculados não foram capazes de compreender em seu intervalo a resposta de referência, dada pela pf de MCS. O intervalo entre os limites bimodais foi mais estreito quando o método de Bishop foi empregado no acoplamento direto, em comparação ao intervalo observado quando o método Morgenstern-Price foi empregado, correspondendo a 1,05E-03 e 4,23E-03, respectivamente. Por outro lado, o método de Morgenstern-Price forneceu limites bimodais capazes de cercar mais adequadamente a pf dada por MCS, a qual está contida entre o limite inferior e superior da pf_{sis} . Apesar dessas diferenças, decorrentes das diferentes formulações dos métodos de equilíbrio limite utilizados, ambos foram capazes de aproximar consistentemente a probabilidade de falha do talude, considerando que geralmente os valores de pf são avaliados quanto à sua ordem de grandeza, em escala logarítmica. A aplicação do método Hassan-Wolff possibilitou a identificação de superfícies muito semelhantes às superfícies de maior recorrência de mínimo $FS(\mathbf{x}_k)$ identificadas nas simulações MCS, embora nenhuma dessas superfícies coincida com a pf_{max} dada pelo FORM. Esta última superfície, a superfície de pf_{max} , que graças ao programa RASS pode ser facilmente conhecida, é fundamental para uma melhor definição dos limites da pf_{sis} . Consequentemente, se apenas as superfícies RSS fossem consideradas na composição do sistema em série, o valor de pf_1 não corresponderia ao valor máximo de probabilidade de falha, e resultaria em valores subestimados do limite inferior da pf_{sis} , podendo piorar a aproximação das respostas do FORM em relação às respostas do MCS.

4 CONCLUSÕES

Os resultados apresentados neste trabalho evidenciam a possibilidade de se empregar o FORM como uma interessante alternativa ao MCS em análises probabilísticas de estabilidade de taludes. O uso do FORM, aliado ao método Hassan-Wolff e aos limites bimodais da probabilidade de falha de um sistema em série, pode ser especialmente atrativo para viabilizar volumes expressivos de análise probabilísticas, que se fossem conduzidas diretamente via MCS em computadores comuns poderiam ser proibitivas. Dessa forma, para contornar essa situação, o FORM pode revelar as situações críticas de estabilidade por meio de um processo de triagem, para que então essas situações possam ser isoladamente investigadas com uso do MCS, se necessário for. Verificações probabilísticas como a da estabilidade dos taludes de uma barragem de aterro, em que o nível do reservatório a montante varia com o tempo e a série histórica avaliada é suficientemente extensa, poderiam ser realizadas a partir dos procedimentos apresentados, possibilitando assim a identificação dos instantes em que as probabilidades de falha dos taludes de montante e de jusante, por exemplo, são máximas. Para estes instantes críticos, o analista pode ainda optar pela realização das análises de MCS, a fim de enriquecer ainda mais o conjunto de informações empregadas nas tomadas de decisões de engenharia.

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Abramson, L. W., Lee, T. S., Sharma, S., Boyce, G. M. (2001). *Slope stability and stabilization methods*. John Wiley & Sons.
- Ang, A. H.-S., Tang, W. H. (1984). *Probability concepts in engineering planning and design: Decision, risk, and reliability*. Vol. 2, John Wiley & Sons, New York.
- Beck, A. T. (2019). *Confiabilidade e segurança das estruturas*. Elsevier Brasil.
- Chakraborty, R., Dey, A. (2022). Probabilistic slope stability analysis: state-of-the-art review and prospects. *Innovative Infrastructure Solutions*, v. 7, n. 2, p. 177.
- Chowdhury, R. N., Xu, D. W. (1992). Geotechnical system reliability of slopes. *Reliability Engineering & System Safety*, v. 37, n. 2, p. 99–108.
- Crum, D. A., D'Andrea, R., Li, K. S., Cheung, R.W., Zouhair, M., Hassan, A. M., Wolff, T. F. (2001). Search algorithm for minimum reliability index of earth slopes. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 127(2), pp.194-200.
- Ditlevsen, O. (1979). Narrow Reliability Bounds for Structural Systems. *Journal of Structural Mechanics*, v. 7, n. 4, p. 453–472.
- Donald, I. B., Giam, P. S. K. (1989). *Example problems for testing soil slope stability programs* (No. 8/1989).
- Duncan, J. M. (1996). State of the art: limit equilibrium and finite-element analysis of slopes. *Journal of Geotechnical Engineering*, 122(7), 577-596.
- Duncan, J. M., Wright, S. G., Brandon, T. L. (2014). *Soil strength and slope stability*. John Wiley & Sons.
- Griffiths, D. V., Huang, J., Fenton, G. A. (2001). Probabilistic infinite slope analysis. *Computers and Geotechnics*, v. 38, n. 4, p. 577–584.
- Hasofer, A. M., Lind, N. C. (1974). Exact Invariant Second-Moment Code Format. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, v. 100, n. 1, p. 111–121.
- Hassan, A. M., Wolff, T. F. (1999). Search Algorithm for Minimum Reliability Index of Earth Slopes. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, v. 125, n. 4, p. 301–308.
- Huang, J., Griffiths, D. V., Fenton, G. A. (2010). System Reliability of Slopes by RFEM. *Soils and Foundations*, v. 50, n. 3, p. 343–353.
- Ji, J.; Low, B. K. (2012). Stratified Response Surfaces for System Probabilistic Evaluation of Slopes. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, v. 138, n. 11, p. 1398–1406.
- Jiang, S. H., Huang, J., Griffiths, D. V., Deng, Z. P. (2022). Advances in reliability and risk analyses of slopes in spatially variable soils: A state-of-the-art review. *Computers and Geotechnics*, 141, 104498.

- Leonel, E. D., Beck, A. T., Venturini, W. S. (2011). On the performance of response surface and direct coupling approaches in solution of random crack propagation problems. *Structural Safety*, v. 33, n. 4, p. 261–274.
- Liu, H., Zheng, J., Zhang, R., Yang, W., & Guo, Y. (2023). Representative slip surface identification and reliability analysis of slope systems in spatially variable soils. *Georisk: Assessment and Management of Risk for Engineered Systems and Geohazards*, 17(3), 503-520.
- Ma, J. Z., Zhang, J., Huang, H. W., Zhang, L. L., Huang, J. S. (2017). Identification of representative slip surfaces for reliability analysis of soil slopes based on shear strength reduction. *Computers and Geotechnics*, 85, 199-206.
- Oka, Y., Wu, T. H. (1990). System reliability of slope stability. *Journal of Geotechnical Engineering*, 116(8), 1185-1189.
- Phoon, K.-K., Kulhawy, F. H. (1999). Characterization of geotechnical variability. *Canadian Geotechnical Journal*, v. 36, n. 4, p. 612–624.
- Przewłócki, J. (2021). Brief Literature Review and Classification System of Reliability Methods for Evaluating the Stability of Earth Slopes. *Sustainability*, 13(16), 9090.
- Rackwitz, R., Fiessler, B. (1978). Structural reliability under combined random load sequences. *Computers and Structures*, v. 9, n. 5, p. 489–494.
- Zhang, J., Huang, H. W., Juang, C. H., Li, D. Q. (2013). Extension of Hassan and Wolff method for system reliability analysis of soil slopes. *Engineering geology*, 160, 81-88.
- Zhang, J., Zhang, L. M., Tang, W. H. (2011). New methods for system reliability analysis of soil slopes. *Canadian Geotechnical Journal*, v. 48, n. 7, p. 1138–1148.
- Zhou, W., Gong, C., Hong, H. P. (2017). New Perspective on Application of First-Order Reliability Method for Estimating System Reliability. *Journal of Engineering Mechanics*, v. 143, n. 9, p. 04017074.
- Zhu, D. Y., Lee, C. F., Qian, Q. H., & Chen, G. R. (2005). A concise algorithm for computing the factor of safety using the Morgenstern Price method. *Canadian Geotechnical Journal*, 42(1), 272-278.