

Modelagem Geotécnica de Grandes Deformações de uma Barragem de Rejeitos Utilizando o Método do Ponto Material

Lucas Ghion Zorzan
Mestrando, PUC-Rio, Curitiba, Brasil, lucasghionzorzan@gmail.com

Fabrizio Fernández
Professor, Universidad Católica del Norte, Antofagasta, Chile, fabricio.fernandez@ucn.cl

Eurípedes do Amaral Vargas Jr.
Professor, PUC-Rio, Rio de Janeiro, Brasil, vargas@puc-rio.br

RESUMO: A modelagem numérica de rupturas de barragens de mineração representa, atualmente, uma importante ferramenta na previsão de comportamento e consequências associadas a eventuais falhas de estruturas de contenção de rejeitos ou sedimentos. Eventos recentes de rupturas, tanto no Brasil quanto no exterior, demonstram que as metodologias utilizadas para esse fim apresentam algumas limitações, seja pelos métodos empregados, hipóteses associadas ou pela complexidade do fenômeno em si. Utilizando uma abordagem geotécnica, o presente trabalho tem como objetivo contribuir para a avaliação do processo de ruptura de barragens de mineração por meio da modelagem numérica de grandes deformações utilizando o Método do Ponto Material (MPM), considerando tanto os eventos que podem conduzir à falha geotécnica, o desenvolvimento da ruptura e sua dinâmica até a estabilização, com a definição do *run-out* da ruptura. O MPM, por ser um método híbrido capaz de simular o meio contínuo utilizando pontos deslocáveis em uma malha fixa de cálculo, supera algumas limitações de métodos numéricos convencionalmente utilizados em geotecnia em análises de grandes deformações, ao mesmo tempo que permite a utilização de modelos constitutivos elasto-plásticos que são aplicáveis para análises de barragens de rejeitos. Neste trabalho, é estudada a ruptura da Barragem Norte do Complexo de Mineração de Cadia, na Austrália, caso histórico de falha de uma estrutura de contenção de rejeitos. As modelagens focam na simulação de um *run-out* compatível com as observações de campo, procurando contribuir tecnicamente para a disseminação do MPM como uma ferramenta numérica adequada e disponível para este tipo de análise geotécnica.

PALAVRAS-CHAVE: Método do Ponto Material, Grandes Deformações, Barragens de Rejeitos, Ruptura

ABSTRACT: Numerical modeling of mining dam ruptures currently represents an important tool in predicting the behavior and consequences associated with potential failures of tailings or sediment containment structures. Recent rupture events, both in Brazil and abroad, demonstrate that the methodologies used for this purpose have some limitations, whether due to the methods employed, associated assumptions, or the complexity of the phenomenon itself. Using a geotechnical approach, this work aims to contribute to the evaluation of the mining dam rupture process through numerical modeling of large deformations using the Material Point Method (MPM), considering both the events that can lead to geotechnical failure, the development of the rupture, and its dynamics until stabilization, with the definition of the rupture run-out. MPM, being a hybrid method capable of simulating the continuum using movable points in a fixed calculation mesh, overcomes some limitations of numerically conventional methods used in geotechnical analyses of large deformations, while allowing the use of elasto-plastic constitutive models applicable for tailings dam analyses. In this work, the rupture of the Northern Tailings Storage Facility of the Cadia Mining Complex in Australia is studied. The modeling focuses on simulating a run-out consistent with field observations, seeking to technically contribute to the dissemination of MPM as a suitable and available numerical tool for this type of geotechnical analysis.

KEYWORDS: Material Point Method, Large Deformation, Tailings Dams, Failure

1 INTRODUÇÃO

Rupturas de grandes proporções envolvendo barragens de rejeitos têm afetado a sociedade de maneira expressiva nos últimos anos. No caso particular do Brasil, a ruptura de duas barragens - Barragem de Fundão (2015), em Mariana-MG e Barragem I (2019) do Córrego do Feijão, em Brumadinho-MG - tiveram consequências catastróficas em termos ambientais, sociais e econômicos, impactando na perda de centenas de vidas humanas. Esta realidade provocou o aumento do rigor da legislação nacional e, no meio técnico, conduziu a um forte aprimoramento das técnicas de projeto, análise e verificação de barragens de rejeitos.

Incorporando um risco de ruptura cerca de duas vezes superior ao observado para barragens de reservação de água (Williams, 2021), estas estruturas de terra destinadas para acúmulo dos resíduos provenientes da atividade mineral têm se mostrado um desafio técnico para a engenharia geotécnica. Além da grande escala, figurando entre as maiores obras civis atualmente executadas (Adamo et al., 2021), as barragens de rejeitos agregam um elevado grau de dificuldade envolvendo interface entre a constante variação geométrica do aterro, a forte complexidade hidromecânica dos materiais depositados e sua variabilidade espacial bem como as operações empregadas na gestão da mina e alteamento da barragem.

Os métodos frequentemente empregados em análises de estabilidade e tensão-deformação baseiam-se na teoria do equilíbrio limite (com emprego de métodos clássicos e modelos rígidos perfeitamente plásticos) e simulações numéricas que empregam em quase sua totalidade o Método dos Elementos Finitos (MEF) (Yuan et al., 2015). Uma vez que as considerações de equilíbrio limite não representam o comportamento pós-ruptura ou a evolução dos deslocamentos e deformações, a modelagem numérica do comportamento geomecânico dos rejeitos é frequentemente realizada considerando um corpo com comportamento elasto-plástico, discretizado em uma malha contínua. Esta hipótese, embora aplicada com bastante sucesso até os dias atuais, possui limitações em representar problemas de grandes deformações - como, por exemplo, no estudo do comportamento pós-ruptura. Desta forma, a aplicação de métodos numéricos sem malha ou híbridos se mostra uma interessante alternativa com potencial prático de sucesso em avaliações de barragens de mineração.

O presente trabalho tem por objetivo apresentar os estudos numéricos, utilizando o Método do Ponto Material (MPM), para avaliação do comportamento pós-ruptura de uma barragem de rejeitos alteada para montante, cuja ruptura ocorreu em 2018 sem consequências ambientais significativas e sem perda de vidas humanas. De modo geral, se propõe avaliar a aplicabilidade do MPM no estudo de barragens de mineração bem como seu potencial na definição do *run-out* de rupturas potenciais.

2 O MÉTODO DO PONTO MATERIAL

O *Material Point Method*, em português Método do Ponto Material (MPM), é um método numérico híbrido embasado na combinação de formulações Lagrangeanas e Eulerianas, cujas aplicações são diversas tanto na Engenharia quanto em outros ramos do conhecimento (Vaucorbeil, 2019). De maneira simplificada, o esquema geral do ciclo computacional do MPM pode ser resumido como apresentado na Figura 1 e no sequenciamento a seguir:

1. Inicialização dos pontos materiais (Figura 1-a).
2. Mapeamento das informações contidas nos pontos, interpolando-as para os nós da malha Euleriana (Figura 1-b).
3. Resolução da equação governante nos nós da malha Euleriana (Figura 1-c).
4. Mapeamento das informações contidas nos nós, transferindo-as para os pontos materiais (Figura 1-d).
5. Reinício do ciclo.

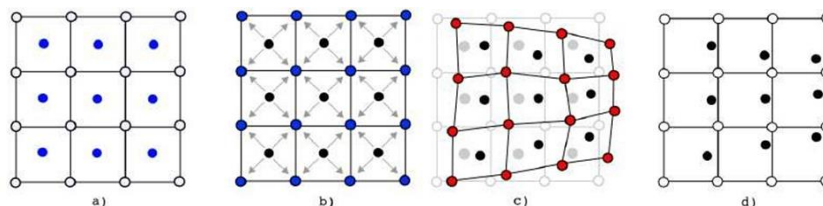


Figura 1. Esquema do processo de cálculo computacional no MPM (adaptado de Fernández, 2020).

2.1 Aspectos do MPM em Geotecnia

Em especial nas últimas duas décadas, a difusão dos métodos numéricos por meio de *softwares* comerciais, principalmente utilizando implementações do MEF, possibilitou a utilização cotidiana das ferramentas computacionais para problemas práticos. Para o caso particular de problemas de grandes deformações, as análises com o MEF têm sido aplicadas com sucesso nas últimas décadas (Augarde et al., 2021), demandando reinicialização da malha de cálculo e remapeamento dos pontos de quadratura para contornar as limitações de deformações excessivas das malhas utilizadas para discretização no MEF.

Um grupo de métodos, no qual o Método do Ponto Material se inclui, atraiu grande interesse da comunidade geotécnica pelo potencial de análise de problemas em grandes deformações envolvendo custos computacionais significativamente menores (Sulsky et al., 1994). Estes métodos, ditos híbridos, possuem como atrativo a utilização de um artifício de cálculo envolvendo uma malha cuja forma é retornada à posição inicial a cada ciclo de cálculo, sendo a informação armazenada em pontos materiais com capacidade de simular materiais com comportamento dependente do histórico de tensões. Este fato permite se trabalhar com uma deformação acumulada consideravelmente grande sem os empecilhos numéricos associados a uma malha extremamente deformada.

2.2 Implementações Computacionais do MPM

Deve-se notar que as mais importantes publicações e, conseqüentemente, os estudos voltados à aplicação do MPM, são bastante recentes, concentrando-se em um período contido nos últimos 30 anos. Embora uma série de publicações tenha demonstrado o potencial do método em análises geotécnicas, sua utilização está ainda, em maior medida, restrita ao ambiente acadêmico, de pesquisa e desenvolvimento. A Tabela 1 apresenta a lista dos principais programas disponíveis, em uma atualização do estudo feito por Fernández (2020) a partir de uma extensa revisão do estado da arte do MPM.

Tabela 1. Principais programas computacionais com implementação do MPM (após Fernández, 2020).

| Programa | Autor | Ano | País | Universidade | Enfoque Geotécnico |
|------------|---------------------------------|------|----------------|-------------------|--------------------|
| NairnMPM | J. Nairn | 2003 | Estados Unidos | Utah | Não |
| MPM-GIMP | P. C. Wallstedt e J. E. Guilkey | 2008 | Estados Unidos | Utah | Não |
| C-SAFE | ASC Center | 2011 | Estados Unidos | Utah | Não |
| Anura3D | Anura3D-RC | 2016 | Vários | Várias | Sim |
| MPM3D-F90 | X. Zhang | 2018 | China | Tsinghua | Não |
| CB-Geo | K. Kumar | 2018 | Estados Unidos | Texas | Sim |
| MPMsim | MPMsim Ltda. | 2019 | Reino Unido | - | Não |
| AMPLE | W. M. Coombs e C. Augarde | 2019 | Reino Unido | Durham University | Não |
| MPM-PUCRio | F. Fernández | 2020 | Brasil | PUC-Rio | Sim |
| Karamelo | A. de Vaucorbeil et al. | 2020 | Austrália | Deakin University | Não |

3 MODELAGEM NUMÉRICA DA RUPTURA DA BARRAGEM NORTE DE CADIA

O complexo Cadia Valley consiste em um conjunto de estruturas destinadas à exploração e processamento de minério de ouro e cobre e está localizado a cerca de 25 km da cidade de Orange, Austrália. Em termos geotécnicos, duas barragens de armazenamento de rejeitos fazem parte do conjunto: a Barragem Norte e a Barragem Sul (Figura 2).



Figura 2. Localização das principais estruturas do complexo de Cadia.

O evento principal de ruptura ocorreu na face sul da Barragem Norte no dia 9 de março de 2018, aproximadamente entre as estacas 1.850 e 2.150. A primeira evidência do processo foi o surgimento de trincas na crista do barramento, as quais se desenvolveram ao longo do dia de observação. No dia 11 de março, um segundo evento envolvendo liquefação dos materiais ocorreu, estendendo a superfície de ruptura e aumentando a abrangência do escorregamento. Ao final da ocorrência, 1.330.000 m³ de material foi mobilizado, prolongando-se cerca de 170 m para jusante.

Na ocasião da ruptura, estavam sendo realizadas obras de reforço na estrutura, as quais foram divididas em duas etapas: a primeira, consistindo em uma berma de enrocamento entre as El. 720,0 m e 735,0 m (ou seja, um carregamento da estrutura), e a segunda, não executada, no pé do barramento. No início das obras para construção da segunda etapa de reforço, um material de baixa densidade e consistência foi detectado na fundação (solo residual da formação *Forest Reef Volcanics*), demandando a realização de uma escavação (desconfinamento do pé) para posterior assentamento do reforço com enrocamento. O evento de ruptura ocorreu dias após a realização das escavações, tendo as obras executadas na ocasião importante papel no gatilho que levou ao colapso, embora suas causas sejam consideravelmente mais complexas. O estudo relacionado à ruptura da Barragem Norte foi realizado por Jefferies et al. (2019), em um esforço de diversos especialistas para compreender os fenômenos envolvidos no movimento observado em março de 2018.

3.1 Modelo Numérico

O modelo numérico construído no presente trabalho utilizou o MPM para estudo do comportamento pós-ruptura da barragem de Cadia, com foco para a simulação da geometria final deformada da estrutura. O conteúdo aqui apresentado consiste em resultados parciais do estudo completo realizado, com foco para a avaliação da aplicabilidade de modelos constitutivos simples na avaliação deste tipo de problema de grandes deformações.

O código utilizado para processamento das análises numéricas do presente trabalho foi desenvolvido pelo Grupo de Pesquisa Geoanálise do Departamento de Engenharia Civil e Ambiental da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. O simulador denominado MPM-PUCRio foi concebido e publicado por Fernández (2020). O *software* é um simulador numérico que considera o Método do Ponto Material para modelar problemas de grandes deformações em Geotecnia, além de permitir a modelagem de processos geológicos, incorporar modelos elasto-plásticos com endurecimento e amolecimento, comportamento viscoso dos materiais e transições reológicas.

3.1.1 Seção de Análise

A seção transversal considerada representativa foi obtida a partir da documentação elaborada pelo Painel de Especialistas responsável pelo diagnóstico do evento (Jefferies et al., 2019). A seção em questão localiza-se na porção central da ruptura, próxima à estaca 2.000. O modelo bidimensional elaborado é composto por 35.052 pontos materiais, distribuídos em uma malha de cálculo composta por células com dimensão de 3,0 m, considerando estado plano de deformação. A Figura 3 apresenta o modelo numérico adotado.

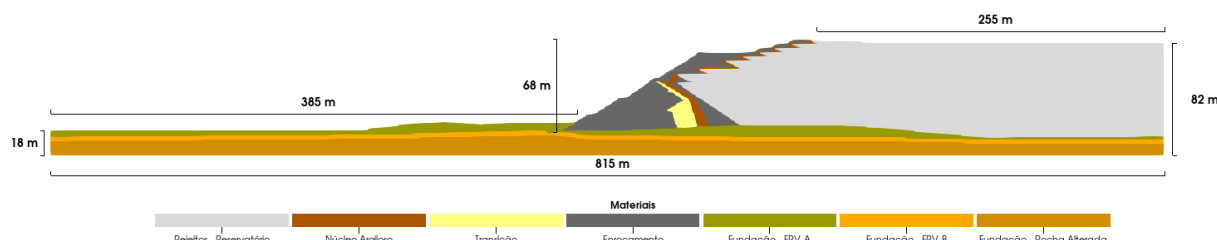


Figura 3. Modelo numérico da Barragem Norte, construído com o MPM- PUCRio.

3.1.2 Parâmetros dos Materiais

A seção da Barragem Norte foi compartimentada em sete materiais. Com relação à definição dos parâmetros dos modelos constitutivos utilizados para as principais análises do presente trabalho, foram considerados os resultados das investigações de campo e laboratório compiladas pelo ITRB (Jefferies et al., 2019), apresentadas e, quando apropriado, reinterpretadas. A Tabela 2 apresenta o resumo dos parâmetros elásticos adotados, enquanto aqueles utilizados para parametrização dos modelos de Tresca e Mohr-Coulomb (tanto na condição drenada quanto não-drenada) são apresentados na Tabela 3.

Dois aspectos importantes sobre o comportamento dos materiais devem ser destacados. Com relação aos rejeitos do reservatório, as investigações executadas permitem concluir que, de uma forma geral, estes materiais apresentavam-se em um estado fofo, com comportamento contrátil no cisalhamento, e saturados, susceptíveis, portanto, ao processo de liquefação. Para o material de baixa consistência identificado na fundação do barramento (denominado FRV-A), investigações laboratoriais posteriores à ruptura identificaram forte tendência de queda de resistência ao cisalhamento do material com o nível de deformações. Ou seja, trata-se de um material com tendência de amolecimento.

Tabela 2. Parâmetros elásticos adotados nas análises.

| Material | ν | E (MPa) |
|--------------------|-------|---------|
| Rejeitos | 0,35 | 50 |
| Núcleo Argiloso | 0,27 | 38 |
| Transição | 0,30 | 78 |
| Enrocamento | 0,35 | 59 |
| FRV Unidade A | 0,30 | 39 |
| FRV Unidade B | 0,30 | 50 |
| FRV Rocha Alterada | 0,25 | 325 |

Tabela 3. Parâmetros de resistência adotados nas análises.

| Material | Peso Específico Saturado kN/m ³ | Resistência Drenada - Pico | | Resistência Drenada - Residual | | Resistência Não Drenada Liquefeita S _u (kPa) | Razão de Resistência Não Drenada - Liquefeita S _u /σ _v |
|--------------------|---|----------------------------|--------|--------------------------------|--------|--|---|
| | | c' (kPa) | φ' (°) | c' (kPa) | φ' (°) | | |
| Rejeitos | 20 | 0,0 | 35,0 | - | - | 5,0 ou 10,0 | 0,09 |
| Núcleo Argiloso | 20 | 10,0 | 22,0 | - | - | - | - |
| Transição | 20 | 0,0 | 42,0 | - | - | - | - |
| Enrocamento | 22 | 0,0 | 40,0 | - | - | - | - |
| FRV Unidade A | 19 | 39,0 | 21,0 | 0,0 | 17,0 | - | - |
| FRV Unidade B | 21 | 55,0 | 25,0 | - | - | - | - |
| FRV Rocha Alterada | 22 | - | - | - | - | - | - |

3.1.3 Cenários Avaliados

Para avaliação do comportamento pós-ruptura da Barragem Norte, foram considerados modelos constitutivos elasto-plástico simples (Tresca e Mohr-Coulomb), considerados modelos básicos e largamente empregados em avaliações geotécnicas. Foram avaliados quatro cenários de modo a verificar, principalmente, a sensibilidade do modelo ao parâmetro de resistência não drenada dos rejeitos do reservatório. Como os modelos considerados não permitem avaliar aspectos específicos de materiais geotécnicos, como a ocorrência de solicitações não drenadas, a liquefação estática ou efeitos de amolecimento, tais condições foram impostas aos modelos por meio de trocas nos modelos constitutivos a partir de condições pré-estabelecidas.

As análises realizadas consideraram acoplamento fluido-mecânico parcial, em que as poropressões foram calculadas apenas no início do processamento a partir da definição do nível freático por meio das leituras de instrumentação disponíveis. Este tipo de acoplamento, embora menos preciso, garantiu simulações mais estáveis do ponto de vista numérico. Ainda assim, de modo a minimizar instabilidades, as poropressões das partículas foram desativadas em um tempo de processamento $t=11,0$ s, em que a ruptura da barragem já é caracterizada e a manutenção das poropressões iniciais tem pouca influência na análise dinâmica de *run-out*.

De forma geral, a modelagem foi realizada considerando a inicialização das tensões geostáticas e poropressões de forma a obter uma condição representativa do estado pré-ruptura. Após a inicialização das partículas, simulou-se a escavação do material de baixa consistência existente no pé da estrutura e fundação (denominado FRV-A), sendo esta condição considerada como gatilho para a degradação da resistência do solo residual de fundação remanescente (susceptível a amolecimento), o qual tem papel importante na indução de deslocamentos na estrutura e, conseqüentemente, na liquefação dos rejeitos do reservatório. A escavação foi simulada em etapa única, de forma instantânea, por meio da inativação dos pontos materiais na geometria da limpeza da fundação. A Tabela 4 apresenta o resumo das simulações realizadas.

Tabela 4. Simulações realizadas.

| Modelo de Cálculo | Condição Simulada |
|-------------------|--|
| MPM-101 | Solicitação não drenada em todo reservatório, considerando modelo de Tresca homogêneo (S_u constante com a profundidade) em um valor de 10 kPa (conforme Pierce, 2021) |
| MPM-102 | Solicitação não drenada em todo o reservatório, considerando modelo de Tresca homogêneo (S_u constante com a profundidade) em um valor de 5 kPa |
| MPM-103 | Solicitação não drenada em todo o reservatório, considerando modelo de Tresca heterôgeneo (S_u variando com a profundidade) na razão $S_u/\sigma'_v=0,09$ |
| MPM-104 | Solicitação não drenada em todo o reservatório, considerando modelo de Tresca heterôgeneo (S_u variando com a profundidade) na razão $S_u/\sigma'_v=0,09$ com S_u mínimo de 5 kPa |

3.2 Resultados Obtidos

A simulação da dinâmica da ruptura pela simulação MPM-101 conduziu à geometria final apresentada na Figura 4, na qual também estão representados os levantamentos topográficos realizados após os eventos de março de 2018. Nota-se que o modelo subestima o *run-out* final da estrutura, ou seja, o deslocamento máximo das partículas na ocorrência da ruptura é inferior ao realmente observado. Na porção de montante do reservatório liquefeito, observa-se recalques significativos e pouca correspondência com a superfície de ruptura levantada.

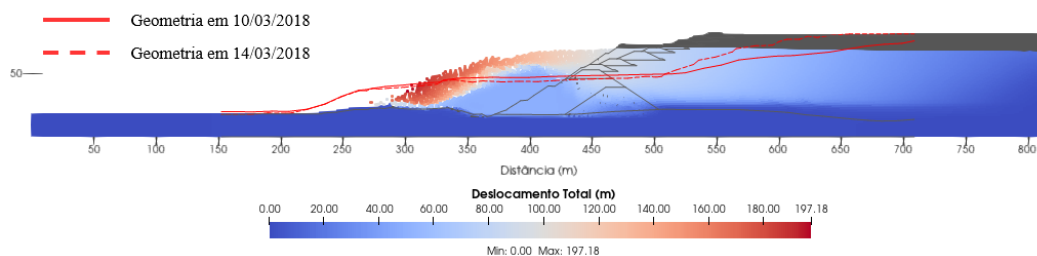


Figura 4. Geometria final do modelo MPM-101.

Ao se considerar o modelo de Tresca homogêneo em todo o reservatório com $S_u=5$ kPa (Figura 5), nota-se maior aproximação entre o *run-out* obtido no modelo numérico e o identificado em campo. As diferenças acentuam-se para montante, especialmente na região em que se concentra a porção do dique de partida (em enrocamento) mobilizado (entre as distâncias de 350 e 450 m). No reservatório, permanecem recalques significativos e pouca correspondência com o levantamento, possivelmente em função da liquefação total do reservatório. A comparação entre os modelos MPM-101 e MPM-102 permite inferir que a resistência não-drenada liquefeita, constante com a profundidade, de 10 kPa é alta para a geometria e condições modeladas.

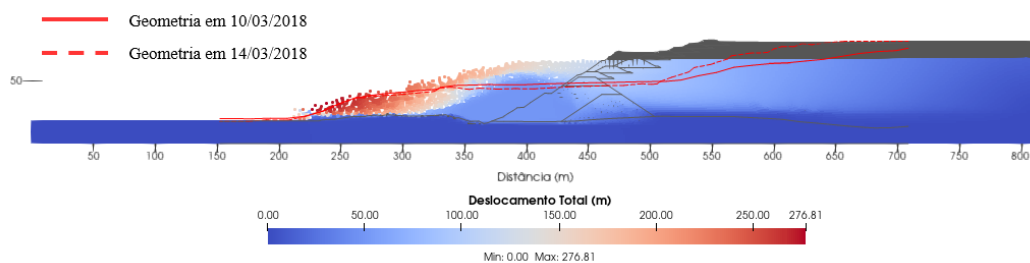


Figura 5. Geometria final do modelo MPM-102.

De modo a verificar a sensibilidade do modelo à adoção de uma resistência não drenada variável com a profundidade, utilizando a razão de resistência S_u/σ'_v na condição liquefeita, que é uma prática recorrente na engenharia de barragens, processou-se o modelo MPM-103. O resultado, apresentado na Figura 6, demonstrou a ocorrência de deslocamentos altamente super-estimados, de modo que os pontos materiais atingiram, inclusive, os limites da malha Euleriana de cálculo. Assim, o *run-out* obtido com esta hipótese não foi representativo para a estrutura, resultando na liberação de um volume maior de materiais do reservatório, além de uma área impactada a jusante superior à observada.

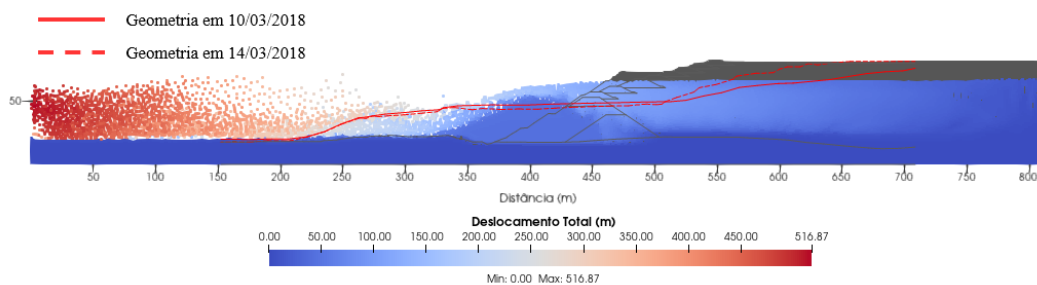


Figura 6. Geometria final do modelo MPM-103.

Finalmente, o modelo MPM-104 considerou a representação da resistência não drenada dos rejeitos do reservatório a partir da variação linear com o nível de confinamento a partir de $S_u/\sigma'_v=0,09$, porém considerando um valor de $S_{u,mínimo}=5$ kPa (valor constante adotado no MPM-102). A partir da Figura 7 nota-se que houve boa representação da massa rompida na região de jusante, bastante semelhante ao levantamento pós-ruptura. Resultados próximos aos da Figura 5 (MPM-102) foram recuperados, indicando pequena sensibilidade da dinâmica do movimento à consideração do modelo de Tresca heterogêneo, sendo o comportamento geral mais sensível ao valor da resistência não drenada constante com a profundidade.

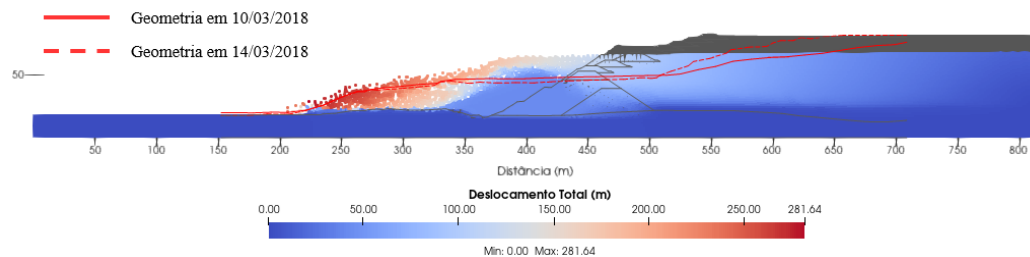


Figura 7. Geometria final do modelo MPM-104.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS E CONCLUSÕES

O presente trabalho apresentou os estudos numéricos realizados utilizando o Método do Ponto Material (MPM) na simulação do comportamento pós-ruptura de uma barragem de rejeitos alteada para montante. Foram utilizados modelos constitutivos simples, de Mohr-Coulomb e Tresca, para simular os eventos que antecederam o incidente bem como a dinâmica do movimento após desencadeado o processo. Embora com limitações em termos de representação do comportamento complexo dos solos, estes modelos constitutivos permitiram a simulação da geometria da massa rompida com relativa assertividade, ao menos para estabelecimento de uma região potencialmente afetada pelo volume liberado na ruptura.

Os resultados indicam que o método numérico MPM possui relevante potencial prático no estudo de problemas de grandes deformações em geotecnia, especialmente por superar problemas numéricos inerentes à excessiva deformação das malhas de cálculo em métodos Eulerianos, tal como o MEF.

Os resultados iniciais apresentados nesta publicação permitem traçar algumas recomendações para trabalhos futuros, tais como a utilização de modelos constitutivos avançados às análises com o MPM, de forma a captar o comportamento tensão-deformação-resistência dos solos ao longo de toda a sollicitação. Isso minimizaria o número de interações entre o usuário e o programa, o que conduziria a uma maior capacidade de o modelo preditivo fornecer resultados confiáveis.

AGRADECIMENTOS

Os autores deste trabalho agradecem ao CNPq, à CAPES e à PUC-Rio pelo apoio financeiro e institucional para realização da pesquisa apresentada.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Adamo, N.; Al-Ansari, N.; Sissakian, V.; Laue, J.; Knutsson, S. (2021). *Dam safety: The question of tailings dams*. J. Earth Sci. Geotech. Eng, 11:1-26.
- Augarde, C. E., Lee, S. J., & Loukidis, D. (2021). *Numerical modelling of large deformation problems in geotechnical engineering: A state-of-the-art review*. Soils and Foundations, 61(6), 1718-1735.
- Fernández, F. (2020). *Modelagem numérica de problemas geotécnicos de grandes deformações mediante o método do ponto material*. Pontifícia Universidade Católica de Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.
- Jefferies, M.; Morgenstern, N. R.; Zytel, D. V. ; Wates, J. (2019). *Report on NTSF embankment failure*. Technical report, Independent Technical Review Board.
- Sulsky, D.; Chen, Z.; Schreyer, H. L. (1994). *A particle method for history-dependent materials*. Computer methods in applied mechanics and engineering, 118:179-196.
- Vaucorbeil, A. D.; Nguyen, V. P.; Sinaie, S. ; Wu, J. Y. (2019). *Material point method after 25 years: theory, implementation and applications*. Advances in applied mechanics, 53:185-398.
- Yuan, L. W., Li, S. M., Peng, B., & Chen, Y. M. (2015). *Study on failure process of tailing dams based on particle flow theories*. International Journal of Simulation Modelling, 14(4), 658-668.